

FOGLIO DI ESERCIZI 6

GEOMETRIA 2 (2021-2022) - UNIVERSITÀ DELLA CALABRIA
DOCENTI: FRANCESCO POLIZZI, TOMMASO GENTILE

Esercizio 1. Svolgere i punti seguenti.

(a) Dimostrare il seguente teorema (di Cantor): ogni successione decrescente

$$K_1 \supseteq K_2 \supseteq K_3 \supseteq \dots$$

di compatti non vuoti in uno spazio T_2 ha intersezione non vuota.

(b) Sia ora

$$D_1 \supseteq D_2 \supseteq D_3 \supseteq \dots$$

una successione decrescente infinita di dischi chiusi (non necessariamente concentrici) in \mathbb{R}^2 tale che il raggio dei D_n tenda a zero per $n \rightarrow +\infty$. Utilizzare il risultato del punto (a) per dimostrare che l'intersezione

$$X := \bigcap_{n=1}^{+\infty} D_n$$

consiste di esattamente un punto.

Esercizio 2. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia X_n il sottoinsieme di \mathbb{R}^2 definito da $\{nx^2 + ny^2 = 1\}$. Sia poi

$$X := \bigcup_{n=1}^{+\infty} X_n.$$

(a) Stabilire se X è compatto e stabilire se X è connesso.

(b) Determinare la chiusura \bar{X} di X in \mathbb{R}^2 e stabilire se \bar{X} è compatta.

(c) Detta ℓ la retta $y - x = 0$, stabilire se $X \cap \ell$ è uno spazio topologico compatto.

Esercizio 3. Sia \mathbb{Q} l'insieme dei numeri razionali con l'usuale distanza euclidea. Dimostrare che

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid |x| < \sqrt{2}\}$$

è chiuso e limitato ma non compatto.

Esercizio 4. Sia \mathbb{R}_{ss} l'insieme dei numeri reali dotato della topologia della semi-continuità superiore. Si dimostri che ogni sottoinsieme compatto non vuoto in \mathbb{R}_{ss} ammette massimo. E' vero che ogni compatto in \mathbb{R}_{ss} ammette minimo?

Esercizio 5. Sia X uno spazio topologico dotato della topologia cofinita. Mostrare che ogni sottospazio $Y \subseteq X$ è compatto.

Esercizio 6. Sia \mathbb{R}_{Sf} la retta di Sorgenfrey. Dimostrare che il sottospazio $[0, 1]$ di \mathbb{R}_{Sf} non è compatto.